1. Határozzuk meg az alábbi 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorát.

$$f(x) := \begin{cases} -3 & \text{, ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0[\\ 3 & \text{, ha } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 & \text{, ha } x \text{ a } [-\pi, \pi[\text{ intervallum más pontja.} \end{cases}$$

Jelölje a Fourier-sor összegfüggvényét Φ. $\Phi(-\pi) = ?$ $\Phi(0) = ?$

Fourier-együtthatók:

$$a_\ell(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos(\ell x)}_{\text{véges sok pont kivételével ptlan}}\, dx = 0 \qquad (\ell \in \mathbb{N})$$

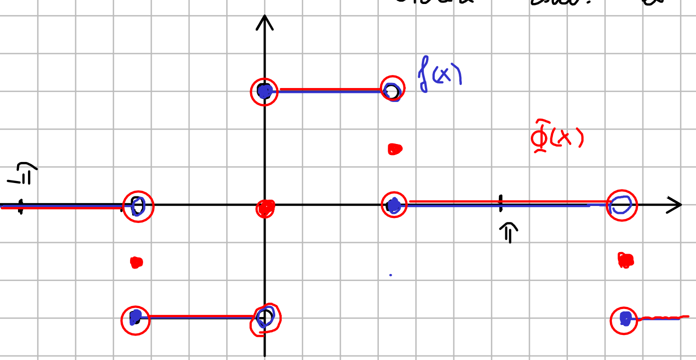
$$(*) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \ell \equiv 1,3 \ (4) \\ 1 & \text{ha } 4 \mid \ell \\ -1 & \text{ha } \ell \equiv 2 \ (4) \end{cases}$$

$$\pi \cdot b_\ell(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin(\ell x)}_{ps.}\, dx = 2\cdot\int_0^{\pi} f(x)\sin(\ell x)\, dx = 6\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\ell x)\, dx = 6\cdot\left[-\frac{\cos(\ell x)}{\ell}\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = 6\cdot\left(1-\overbrace{\cos\left(\ell\frac{\pi}{2}\right)}^{(*)}\right)$$

Fourier-sor:

$$\Phi_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{\ell=1}^{n}\left(a_\ell(f)\cos(\ell x) + b_\ell(f)\sin(\ell x)\right) = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell(f)\sin(\ell x) \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

F-sor összegfv.e: 1.mo: f-re teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei $\Rightarrow$ Fourier-sor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén konv. és $\Phi(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$



$$\Rightarrow \quad \Phi(-\pi) = 0$$

$$\Phi(0) = \frac{3+(-3)}{2} = 0$$

2.mo:

$$\Phi(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left(a_\ell(f)\cos(\ell x) + b_\ell(f)\sin(\ell x)\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell(f)\sin(\ell x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \Phi(-\pi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell(f)\underbrace{\sin(-\ell\pi)}_{0} = 0, \qquad \Phi(0) = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell(f)\underbrace{\sin(0)}_{0} = 0$$

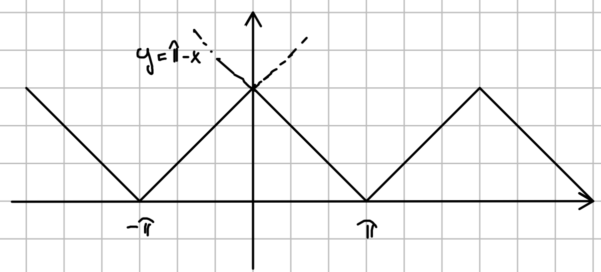
2. Legyen f egy 2π szerint periodikus függvény, amelyre minden $x \in]0, 2\pi]$ esetén $f(x) := |x - \pi|$

a) Határozzuk meg f Fourier-sorát. Jelölje Φ a Fourier-sor összegfüggvényét. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz az $f(x) = \Phi(x)$ egyenlőség?

b) A Fourier-sor segítségével határozzuk meg a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

összeget.



a) f-re teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei és folytonos

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x)$$

Fourier-sor: f páros $\Rightarrow b_\ell(f) = 0$ $(\ell \in \mathbb{N}^+)$

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \pi$$

$\ell \in \mathbb{N}^+$:

$$\pi \cdot a_\ell(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos(\ell x)}_{ps}\, dx = 2\cdot\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(\ell x)\, dx = 2\pi\int_0^{\pi}\cos(\ell x)\, dx - 2\cdot\int_0^{\pi} x\cos(\ell x)\, dx = 2\cdot\frac{1-(-1)^\ell}{\ell^2}$$

$$\int_0^\pi x\cos(x)\,dx = \underbrace{\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{x=0}^{\pi}}_{0} - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k}\,dx = \left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{(-1)^k-1}{k^2}$$

$$\int_0^\pi \cos(kx)\,dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{k=0}^{\pi} = 0$$

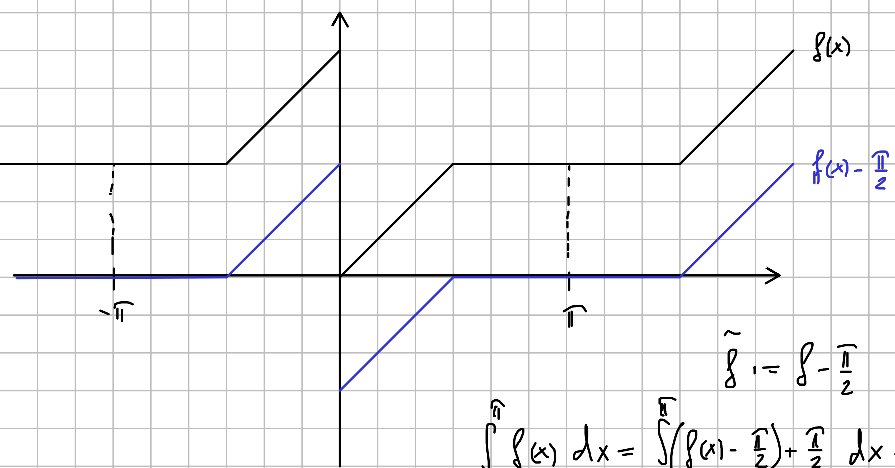
Fourier-sor: $$\Phi_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos(kx) + \underbrace{b_k(f)}_{0}\sin(kx)\right) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k^2}\cos(kx) \quad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N})$$

b) $$f(x) = \Phi(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos(kx) \quad (x\in\mathbb{R})$$

$$\pi = f(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \iff \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Határozzuk meg az alábbi 2π szerint periodikus függvény Fourier-együtthatóit.

$$f(x) := \begin{cases} \pi + x & \text{, ha } x\in[-\frac{\pi}{2},0[\\ x & \text{, ha } x\in[0,\frac{\pi}{2}[\\ \frac{\pi}{2} & \text{, ha } x \text{ a } [-\pi,\pi[\text{ intervallum más pontja.} \end{cases}$$



Megj: $k\in\mathbb{N}^+$ és $c\in\mathbb{R}$ esetén

$$a_k(f+c) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+c)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,dx + \frac{c}{\pi}\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx}^{0} = a_k(f)$$

hasonlóan $b_k(f+c) = b_k(f)$

$\tilde{f} := f - \frac{\pi}{2}$ ptlan

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\,dx = \frac{2\pi^2}{2} = \pi^2 \Rightarrow a_0(f) = \pi$$

$k\in\mathbb{N}^+$: $$a_k(f) = a_k(\tilde{f}) \overset{\tilde{f}\text{ ptlan}}{=} 0$$

$$\pi\cdot b_k(f) = \pi\cdot b_k(\tilde{f}) = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\sin(kx)\,dx}_{ps} = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(kx)\,dx = 2\left(\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx\right) =$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2k} + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2\cdot\left(\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k^2} - \frac{\pi}{2k}\right) = \frac{2\cdot\sin(k\frac{\pi}{2})}{k^2} - \frac{\pi}{k}$$

$$\Rightarrow b_k(f) = \frac{2\cdot\sin(k\frac{\pi}{2})}{\pi k^2} - \frac{1}{k} = \begin{cases} -\frac{1}{k} & \text{ha } k\equiv 0,2\ (4) \\ \frac{2}{\pi k^2}-\frac{1}{k} & \text{ha } k\equiv 1\ (4) \\ -\frac{2}{\pi k^2}-\frac{1}{k} & \text{ha } k\equiv 3\ (4) \end{cases}$$

4. *(Vizsga 2024. június 4.)* Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

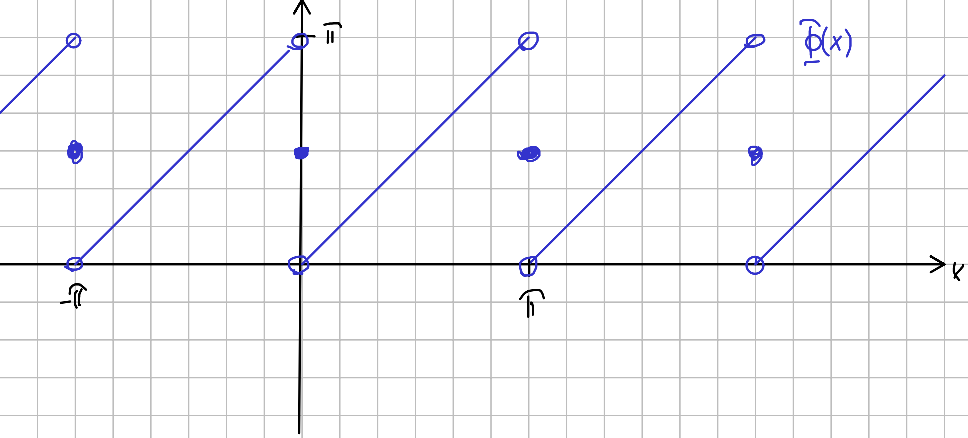
$$f(x) := \begin{cases} x+\pi & \text{, ha } x\in[-\pi,0[\\ x & \text{, ha } x\in[0,\pi[. \end{cases}$$

a) Mondjuk ki a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájáról szóló Dirichlet-tételt.
b) Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Adjuk meg a $\Phi(0)$ és $\Phi(-\frac{\pi}{2})$ értékeket, és rajzoljuk fel Φ grafikonját.
c) Számítsuk ki az $a_3(f)$ Fourier-együtthatót.

a) ld. jegyzet

b) f szakaszonként mon. és kül $\overset{\text{Dirichlet-tétel}}{\Rightarrow}$ $$\Phi(0) = \frac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \overset{f\text{ itt folyt.}}{=} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$



c) $f - \frac{\pi}{2}$ véges sok pont kivételével ptlan

$$a_3(f) = a_3\left(f - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

5. Legyen f abszolút integrálható függvény, f Fourier-transzformáltja segítségével fejezzük ki az alábbi hozzárendeléssel értelmezett függvények Fourier-transzformáltját (amelyekről szintén feltesszük, hogy léteznek).

a) $x \mapsto f(2x-3)$ *b)* $x \mapsto f(2(x-3))$ *c)* $x \mapsto 2f(x) - 3f'(x)$ *d)* $(x \mapsto x^2 f(3x))''$

a) 1. mo

$\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(x \longmapsto f(2x-3))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(2x-3)\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega \cdot \frac{t+3}{2}} \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2} e^{-\frac{3i\omega}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\frac{\omega}{2} t}\, dt =$$

$t := 2x-3$

$\Leftrightarrow x = \frac{t+3}{2}$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{3i\omega}{2}} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

2. mo

$$\mathcal{F}(x \longmapsto f(x-3))(\omega) = e^{-i3\omega} \cdot \mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$\mathcal{F}(x \longmapsto f(2x-3))(\omega) = \frac{1}{2} e^{-i3\frac{\omega}{2}} \cdot \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

b) 1. mo:

$$\mathcal{F}(x \longmapsto f(2(x-3)))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(2x-6)\, e^{-i\omega x}\, dx = \ldots = \frac{1}{2} \cdot e^{-3i\omega} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$t := 2x-6$

$x = \frac{t+6}{2}$

$(\omega \in \mathbb{R})$

2. mo:

$$\mathcal{F}(x \longmapsto f(2x))(\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\mathcal{F}(x \longmapsto f(2(x-3)))(\omega) = \frac{1}{2} \cdot e^{-3i\omega} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

c)

$$\mathcal{F}(2f - 3f')(\omega) = 2\mathcal{F}(f)(\omega) - 3\mathcal{F}(f')(\omega) = 2\mathcal{F}(f)(\omega) - 3i\omega \mathcal{F}(f)(\omega) = (2 - 3i\omega)\mathcal{F}(f)(\omega)$$

$(\omega \in \mathbb{R})$

d)

$$\mathcal{F}\left(\left(x \longmapsto x^2 f(3x)\right)''\right)(\omega) = (i\omega)^2 \cdot \mathcal{F}(x \longmapsto x^2 f(3x))(\omega) = -\omega^2 \cdot i^2 \cdot \mathcal{F}(x \mapsto f(3x))''(\omega) = \circledast$$

$$\mathcal{F}(x \longmapsto f(3x))(\omega) = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

$$\circledast = \frac{\omega^2}{27} \mathcal{F}(f)''\left(\frac{\omega}{3}\right) \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

6. Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier-transzformáltját.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \in]0,1[\\ -1 & \text{, ha } x \in]-1,0[\\ 0 & \text{minden más } x \in \mathbb{R} \text{ esetén.} \end{cases}$$

1. mo Legyen

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \qquad \text{(négyszögjel)}$$

EA: $\mathcal{F}(g)(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \omega = 0 \\ \dfrac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} & \text{ha } \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$ $\qquad \tilde{g}(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ 0 & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\end{cases}$

véges sok pont kivételével $g = \tilde{g} \Rightarrow \mathcal{F}(g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(x) e^{-i\omega x}\,dx = \mathcal{F}(\tilde{g})(\omega)$

$$f(x) = \tilde{g}\left(x - \tfrac{1}{2}\right) - \tilde{g}\left(x + \tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \mathcal{F}(f)(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}} \mathcal{F}(g)(\omega) - e^{i\frac{\omega}{2}} \mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(g)(\omega)\left(-2i\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(f)(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \omega = 0 \\ -\frac{4i}{\omega} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) & \text{ha } \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$

2. mo:

$\omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx = \underbrace{-\int_{-1}^{0} e^{-i\omega x}\,dx}_{t := -x} + \int_0^1 e^{-i\omega x}\,dx = -\int_0^1 e^{i\omega t}\,dt + \int_0^1 e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}\,dt = -2i\int_0^1 \sin(\omega t)\,dt = 2i\left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_{t=0}^{1} = \frac{2i}{\omega}(\cos(\omega) - 1)$$

$$\left(\sin^2\left(\tfrac{\omega}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\omega)}{2}\right)$$

$\omega = 0$:

$$\mathcal{F}(f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)}_{\text{véges sok pont kivételével ptlan.}}\,dx = 0$$

---

7. Tudjuk, hogy minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén $\mathscr{F}\left(x \mapsto e^{-|x|}\right)(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$. Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^{-|3x-6|}$$

függvény Fourier-transzformáltját.

$g(x) := e^{-|x|} \qquad \mathcal{F}(g)(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R})$

1. mo

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}\left(x \longmapsto g(3x-6)\right)(\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}\left(x \longmapsto g(x-6)\right)\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{e^{-6i\frac{\omega}{3}}}{3}\cdot \mathcal{F}(g)\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{e^{-2i\omega}}{3}\mathcal{F}(g)\left(\frac{\omega}{3}\right) =$$

$$= \frac{2\cdot e^{-2i\omega}}{3 + \frac{\omega^2}{3}}$$

2. mo

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(3x-6)\cdot e^{-i\omega x}\,dx \underset{\substack{t := 3x-6 \\ x = \frac{t+6}{3}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cdot e^{-i\omega\frac{t+6}{3}}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\cdot e^{-2i\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cdot e^{-i\frac{\omega}{3}t}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-2i\omega}}{3}\mathcal{F}(g)\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{2\cdot e^{-2i\omega}}{3 + \frac{\omega^2}{3}}$$

---

8. *(Vizsga 2024. június 11.)* Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az

$$\mathscr{F}(x \mapsto f'(2x+1))$$

Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltja segítségével.

---

1. mo:

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\cdot\mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$\mathcal{F}(x \longmapsto f'(x+1))(\omega) = e^{i\omega}\cdot i\omega\cdot\mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$\mathcal{F}(x \longmapsto f'(2x+1))(\omega) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\omega}{2}}\cdot i\frac{\omega}{2}\cdot\mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

2. ws

$$\mathcal{F}(x \longmapsto f'(2x+1))(\omega) = \mathcal{F}(x \longmapsto f'(x+1))(\omega) = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}(x \longmapsto f'(x+1))\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\,e^{i\frac{\omega}{2}}\,\mathcal{F}(f')\left(\frac{\omega}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{\frac{i\omega}{2}} \cdot i\frac{\omega}{2} \cdot \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right)$$